Solution Rattrapage
MVA006 2019-2020
Version B

Ex 1: (16 pts)

1/ $F'(t) = (-2t - 6t^2)\vec{i} + (-3t^2 - 5t^4)\vec{j}$ (2pts)

$F''(t) = (-2 - 12t)\vec{i} + (-6t - 20t^4)\vec{j}$ (2pts)

$\begin{vmatrix} F'(0) \\ F''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ et $t=0$ est un pt critique (2pts)

$\vec{F}'(0) = \vec{0}$

$\vec{F}''(0) = -2\vec{i} \neq 0$ $\quad p = 2$ (1)

$\vec{F}'''(t) = -12\vec{i} + (-6 - 80t^3)\vec{j}$ (1)

$F^{(3)}(0) = -6\vec{j}$ non parallèle à $F''(0) \Rightarrow q = 3$ (1)

$M(0) = (0,0)$ est un rebroussement 1ère espèce (1)

2/ $F'(t) = (2t + 3t^2)\vec{i} + (-1 + 2t)\vec{j}$ (2pts)

$F''(t) = (2 + 6t)\vec{i} + 2\vec{j}$ (2pts)

$\begin{vmatrix} F'(0) \\ F''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $M(0) = (0,0)$ est un pt ordinaire (2pts)

Ex2 (18pts)

1/ $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - x^3 \text{ (2pts)} = 0 \Rightarrow y = x^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - y^3 \text{ (2pts)} = 0 \Rightarrow x - x^9 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x(1 - x^8) = 0$ (2pts)

$x = 0$ ou $x = \pm 1$

2/ pts critiques

$(-1,-1)$, $(0,0)$ et $(1,1)$ (3pts)

3/ $A = f''_{xx} = -3x^2$ (1), $B = f''_{yy} = -3y^2$ (1), $C = f''_{xy} = 1$ (1)

$D = AB - C^2 = 9x^2y^2 - 1$

$D(0,0) = -1 < 0$ $(0,0)$ est un pt selle (2pts)

$D(-1,-1) = 9 - 1 = 8$ $f''_{xx} = -3 < 0$ $f(-1,-1)$ est un max local (2pts)

$D(1,1) = 9 - 1 = 8$ $f''_{xx} = -3 < 0$ $f(1,1)$ est un max local (2pts)

Ex3 (16 pts)

$r(\theta)$ est de période $\frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi$ (3pts)

$r(\theta)$ peut être étudiée sur $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (3pts)

$r(-\theta) = -r(\theta) \Rightarrow (Oy)$ est un axe de symétrie (3pts)

$r(\theta)$ peut être étudiée sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (2pts)

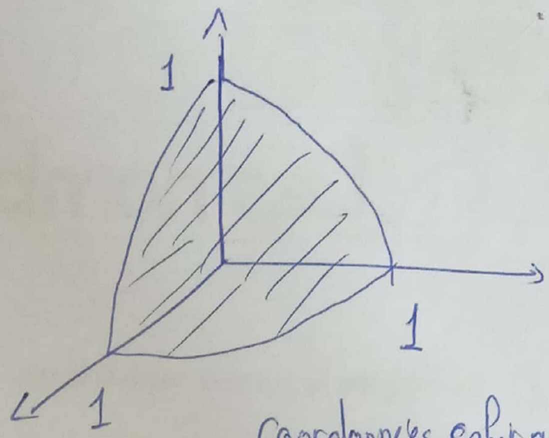
$r\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\theta}{3}\right) = r(\theta)$ (3pts)

$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie

$r(\theta)$ peut être étudiée sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ (2pts)

Scanned with CamScanner

Ex4: (16 pts)



$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\theta\,\sin\varphi\; r^2\sin\varphi\; dr\,d\varphi\,d\theta$$

8 pts

Coordonnées sphériques

$x = r\sin\varphi\cos\theta$

$y = r\sin\varphi\sin\theta$

$z = r\cos\varphi$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\cos\theta\,\sin^2\varphi\; dr\,d\varphi\,d\theta$$

2pts

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\sin^2\varphi\; d\varphi\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\times\frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} d\theta$$

4pts

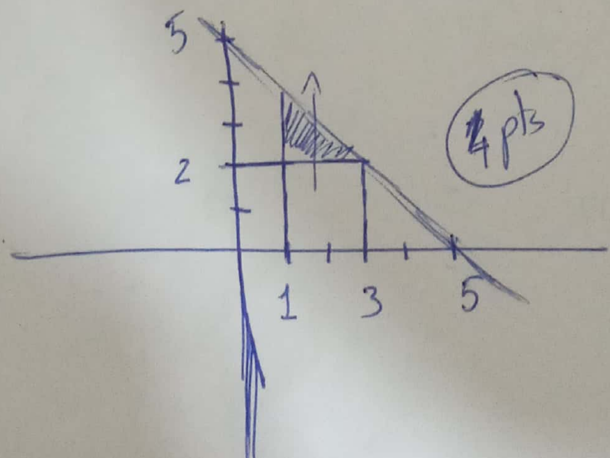
$$= \frac{\pi}{16}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\; d\theta = \frac{\pi}{16}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

2pts

Ex 5: (18 pts)

$$\int_1^3\int_2^{5-x}\frac{1}{(x+y)^3}\,dy\,dx$$

10pts



4 pts

$$= \int_1^3 \left[-\frac{(x+y)^{-2}}{2} \right]_2^{5-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{(x+2)^2} \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{5} + \frac{1}{x+2} \right]_1^3 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right]$$

4 pts

Ex6: (16 pts)

$$|A| = (9-3) - 2(9-6) - 4(-3+6)$$

$$= -12 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

4 pts   2 pts

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, {}^t\mathrm{cof}(A)$$

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$ 8 pts

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -3 & -5 & -9 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$ 2 pts